Tensorprodukt

(Vergleiche Satz 8.4: Charakterisierung der Determinante und Def. 10.1: Bilinearform)

17.5 Def: $V_1, \dots, V_n, W$ K-VR. Eine Abbildung

$$f: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$$

ist **K-multilinear** falls für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und beliebige Vektoren $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n$ die Abbildung

$$\begin{aligned} V_i &\longrightarrow W \\ \underline{v} &\longmapsto f(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{i-1}, \underline{v}, \underline{v}_{i+1}, \dots, \underline{v}_n) \end{aligned}$$

K-linear ist.

17.6 Satz: Zu K-VR $V_1, \dots, V_n$ existiert ein K-VR $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ zusammen mit einer Abbildung $can: V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ (von Mengen), die folgende UE erfüllt:

can ist K-multilinear, und für jeden K-VR T und jede K-multilineare Abbildung

$$t: V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow T$$

existiert genau eine lineare Abbildung $t': V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow T$ mit $t' \circ can = t$.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_n \arrow[rr, "\text{multi}", "can"'] \arrow[dr, "\text{multi}", "\forall t"'] & & V_1 \otimes \dots \otimes V_n \arrow[dl, "\text{linear}"', "\exists!\, t'"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Ferner ist $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ durch die UE bis auf eindeutige Isomorphie bestimmt.

17.7 Def: Wir nennen $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ das Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_n$.

Beweis zu 17.6:

Eindeutigkeit: Übung (genau wie in Notiz 17.2).

Existenz für $n=2$ ($n>2$ analog):

Sei $V := \bigoplus_{V_1 \times V_2} K$. ← Indexmenge

Das ist ein sehr großer K-VR, dessen (Standard-) Basisvektoren $\underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)}$ indiziert werden durch alle Paare $(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in V_1 \times V_2$.

Es gibt eine offensichtliche Abbildung von Mengen

$$\begin{aligned} V_1 \times V_2 &\longrightarrow V \\ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) &\longmapsto \underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} \end{aligned}$$

(injektiv mit Bild genau die Basis). Diese Abbildung ist aber nicht multilinear, denn z.B. ist

$$\underbrace{\underline{e}_{(\underline{v}_1+\underline{v}_1', \underline{v}_2)}}_{\text{Basisvektor}} \neq \underbrace{\underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} + \underline{e}_{(\underline{v}_1', \underline{v}_2)}}_{\text{Summe zweier anderer Basisvektoren}}$$

Wir erzwingen die Multilinearität nun wie folgt:

Sei $\mathcal{U} := \langle \mathcal{U}_0 \rangle$ für

$$\mathcal{U}_0 := \Big\{ \begin{array}{ll} \underline{e}_{(\underline{v}_1+\underline{v}_1', \underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1', \underline{v}_2)}, & \text{1a} \\ \underline{e}_{(\underline{v}_1, a\cdot\underline{v}_2)} - a\cdot\underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} & \text{1b} \\ \underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2+\underline{v}_2')} - \underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2')}, & \text{2a} \\ \underline{e}_{(\underline{v}_1, a\cdot\underline{v}_2)} - a\cdot\underline{e}_{(\underline{v}_1, \underline{v}_2)} & \text{2b} \end{array} \;\Big|\; \underline{v}_i \in V_i,\ a \in K \Big\}$$

Definiere $\quad V_1 \otimes V_2 := V/\mathcal{U}$, und

für $\underline{v}_i \in V_i$: $\quad \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 := [\underline{e}_{(\underline{v}_1,\underline{v}_2)}] \in V/\mathcal{U}$.

Betrachte die Komposition:

$$\begin{aligned} \text{can}: V_1 \times V_2 &\longrightarrow V \longrightarrow V/\mathcal{U} = V_1 \otimes V_2 \\ (\underline{v}_1, \underline{v}_2) &\longmapsto \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 \end{aligned}$$

Diese Komposition can ist nun multilinear:

(1a) $(\underline{v}_1 + \underline{v}_1') \otimes \underline{v}_2 = \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 + \underline{v}_1' \otimes \underline{v}_2$, denn

$$\begin{aligned} &(\underline{v}_1 + \underline{v}_1') \otimes \underline{v}_2 - \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 + \underline{v}_1' \otimes \underline{v}_2 \\ &= [\underline{e}_{(\underline{v}_1+\underline{v}_1', \underline{v}_2)}] - [\underline{e}_{(\underline{v}_1,\underline{v}_2)}] - [\underline{e}_{(\underline{v}_1', \underline{v}_2)}] \\ &= [\underline{e}_{(\underline{v}_1+\underline{v}_1', \underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1,\underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1', \underline{v}_2)}] \\ &= \underline{0} \text{ in } V/\mathcal{U} \text{ da} \\ &\quad \underline{e}_{(\underline{v}_1+\underline{v}_1', \underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1,\underline{v}_2)} - \underline{e}_{(\underline{v}_1', \underline{v}_2)} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &(1b)\ (a \cdot \underline{v}_1) \otimes \underline{v}_2 = a \cdot \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 \\ &(2a)\ \ldots \\ &(2b)\ \ldots \end{aligned}\right\} \text{analog}$$

Ferner hat die Komposition can die geforderte UE: Sei T ein VR, $t: V_1 \times V_2 \longrightarrow T$ multilinear. Wir können eine lineare Abbildung $t_V: V \longrightarrow T$ definieren, indem wir sie auf Basisvektoren festlegen:

$$\begin{aligned} t_V: V &\longrightarrow T \\ \underline{e}_{(\underline{v}_1,\underline{v}_2)} &\longmapsto t(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \end{aligned}$$

Für diese Abbildung kommutiert

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r] \arrow[dr, "t"'] & V \arrow[d, "t_V"] \\ & T \end{tikzcd}$$

und es ist auch die einzige lineare Abbildung, für die dieses Dreieck kommutiert. Ferner folgt aus der Multilinearität von t: $\mathcal{U}_0 \subseteq \ker(t_V)$

(z.B. (1a): $t_V\left(e_{(v_1+v_1', v_2)} - e_{(v_1, v_2)} - e_{(v_1', v_2)}\right)$

$$\begin{aligned}
\text{t' linear} \quad &= t_V\left(e_{(v_1+v_1', v_2)}\right) - t_V\left(e_{(v_1, v_2)}\right) - t_V\left(e_{(v_1', v_2)}\right) \\
\text{Def. t'} \quad &= t_V(v_1+v_1', v_2) - t_V(v_1, v_2) - t_V(v_1', v_2) \\
\text{t' multilinear} \quad &= 0
\end{aligned}$$

)

Da $\ker(t_V)$ ein UVR ist, folgt: $\underbrace{\langle \mathcal{U}_0 \rangle}_{\mathcal{U}} \subseteq \ker(t_V)$.

Aus der UE des Quotienten $V/\mathcal{U}$ (Beispiel 17.4) folgt also: $\exists!$ lineare Abbildung t', für die

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "t_V"] \\
T
\end{tikzcd}$$

Insgesamt kommutiert also

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left, two heads, "\mathrm{can}"] \arrow[dr, "t"'] & V \arrow[r, two heads] & V/\mathcal{U} = V_1 \otimes V_2 \arrow[dl, "t'"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

und aus der Konstruktion folgt auch die Eindeutigkeit von t! $\square$

17.8 Def: Die Vektoren im Bild von can heißen reine Tensoren.

Notation: $\underline{v}_1\otimes\dots\otimes \underline{v}_n := \mathrm{can}(\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n)$ (wie im Beweis oben)

17.9 Notiz: Die reinen Tensoren erzeugen $V_1\otimes\dots\otimes V_n$.

(Klar aus Konstruktion im Beweis: Die Vektoren $\underline{e}_{(\underline{v}_1,\underline{v}_2)}$ erzeugen V, also erzeugen ihre Bilder $\underline{v}_1\otimes \underline{v}_2$ in V/U den VR $V/U = V_1\otimes V_2$.)

⚠ **17.10** Im Allgemeinen ist nicht jedes Element von $V_1\otimes V_2$ ein reiner Tensor.
(can ist i.A. nicht surjektiv. Das folgt z.B. aus Dimensionsgründen

$$\dim(V_1\times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 \qquad \dim(V_1\otimes V_2) \overset{\text{s.u. Korollar 17.13}}{=} \dim V_1\cdot\dim V_2$$

„meistens" größer)

Wie definiert man also eine lineare Abbildung $V_1\otimes V_2 \longrightarrow$ irgendwo, wenn man noch nicht einmal weiß, wie die Elemente von $V_1\otimes V_2$ aussehen? Mit der UE!

17.11 Notiz: Rechenregeln für (reine) Tensoren

$$(\underline{v}_1+\underline{v}_1')\otimes\underline{v}_2 = \underline{v}_1\otimes\underline{v}_2 + \underline{v}_1'\otimes\underline{v}_2$$

$$\underline{v}_1\otimes(\underline{v}_2+\underline{v}_2') = \underline{v}_1\otimes\underline{v}_2 + \underline{v}_1\otimes\underline{v}_2'$$

$$a\cdot\underline{v}_1\otimes\underline{v}_2 = a\cdot(\underline{v}_1\otimes\underline{v}_2) = \underline{v}_1\otimes a\cdot\underline{v}_2$$

$\forall\, \underline{v}_i\in V_i,\ a\in K$. (Das ist nur eine Umformulierung der Multilinearität von can.)

17.12 Satz: Eigenschaften des Tensorprodukts

Für beliebige K-VR haben wir kanonische Isomorphismen

(N) $$K \otimes V \cong V$$
mit $a \otimes \underline{v} \mapsto a \cdot \underline{v}$

(A) $$(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$$
mit $(v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \longmapsto v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \longleftarrow v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)$

(K) $$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$$
mit $\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 \longmapsto \underline{v}_2 \otimes \underline{v}_1$

(D) $$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W \cong \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W)$$
mit $(\underline{v}_i)_i \otimes \underline{w} \longmapsto (\underline{v}_i \otimes \underline{w})_i$

Beweis:

N: $K \times V \xrightarrow{\varphi} V$, $(a, \underline{v}) \mapsto a \cdot \underline{v}$ ist K-bilinear [...], induziert also

$K \otimes V \xrightarrow{\varphi'} V$ (linear). Def. $K \otimes V \xleftarrow{\psi'} V$.
mit $a \otimes \underline{v} \mapsto a \cdot \underline{v}$, $\quad 1 \otimes \underline{v} \leftarrow \underline{v}$

Offenbar ψ' linear.

Es ist $\varphi' \circ \psi'(\underline{v}) = \underline{v}$, also $\varphi' \circ \psi' = id$.

Es ist $\psi' \circ \varphi'(a \otimes \underline{v}) = 1 \otimes a \cdot \underline{v} \overset{17.11}{=} a \otimes \underline{v}$. Also stimmen

$\psi' \circ \varphi'$ und id auf Erzeugern überein. Also folgt: $\psi' \circ \varphi' = id$.

K: ähnlich [...].

D: Auch ähnlich:

Die Abbildung
$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \times W \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W)$$
$$((\underline{v}_i)_i, \underline{w}) \longmapsto (\underline{v}_i \otimes \underline{w})_i$$

ist bilinear, induziert also eine lineare Abb.
$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W \xrightarrow{\varphi'} \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W)$$
mit $(\underline{v}_i)_i \otimes \underline{w} \longmapsto (\underline{v}_i \otimes \underline{w})_i$

Konstruiere

$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W \xleftarrow{\psi'} \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W)$$

wie folgt:

Sei $\iota_i : V_i \hookrightarrow \bigoplus_{i\in I} V_i$ die kanonische Inklusion.

Für jedes i ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W &\xleftarrow{\psi_i} V_i \times W\\ \iota_i(\underline{v}) \otimes \underline{w} &\leftarrow\!\shortmid (\underline{v}_i, \underline{w})\end{aligned}$$

bilinear, induziert also eine lineare Abbildung

$$\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W \xleftarrow{\psi_i'} V_i \otimes W$$

mit $\iota_i(\underline{v}) \otimes \underline{w} \leftarrow\!\shortmid \underline{v}_i \otimes \underline{w}$

Definiere nun

$$\begin{aligned}\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right) \otimes W &\xleftarrow{\psi'} \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W)\\ \sum_i \psi_i'(\underline{x}_i) &\leftarrow\!\shortmid (\underline{x}_i)_i\end{aligned}$$

Wir könnten, statt eine explizite Formel für ψ' anzugeben, auch auf die UE von $\oplus$ verweisen, vgl. Beispiel 17.3. So oder so folgt:

$$\begin{aligned}\sum_i \left(\iota_i(\underline{v}_i) \otimes \underline{w}\right) &\overset{\psi'}{\leftarrow\!\shortmid} (\underline{v}_i \otimes \underline{w})_i\\ \| \quad\quad &\\ \left(\sum_i \iota_i(\underline{v}_i) \otimes \underline{w}\right) &\\ \| \quad\quad &\\ (\underline{v}_i)_i \otimes \underline{w} &\end{aligned}$$

Offenbar φ & ψ inverse zueinander.

A, ersten Iso: Wir weisen nach, dass $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ zusammen mit der Abbildung

$$\widetilde{\operatorname{can}}: V_1 \times V_2 \times V_3 \xrightarrow{\operatorname{can}_{V_1,V_2} \times \operatorname{id}_{V_3}} (V_1 \otimes V_2) \times V_3 \xrightarrow{\operatorname{can}_{V_1 \otimes V_2, V_3}} (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3) \mapsto (\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2, \underline{v}_3) \mapsto (\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2) \otimes \underline{v}_3$$

die UE von $(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3, \operatorname{can}_{V_1,V_2,V_3})$ hat.

- $\widetilde{\mathrm{can}}$ ist multilinear in allen 3 Variablen ✓
- Sei $t: V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow T$ weitere multilineare Abbildung. Dann ist für jedes $\underline{w} \in V_3$ die Abb. $t_{\underline{w}}: V_1 \times V_2 \longrightarrow T$ bilinear.

$$(\underline{v}_1, \underline{v}_2) \longmapsto t(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w})$$

Sie induziert also eine lineare (1) Abbildung

$$t'_{\underline{w}}: V_1 \otimes V_2 \longrightarrow T$$

mit $\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 \longmapsto t(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w})$

Aus Linearität von t in letzter Koordinate folgt: $t_{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)} = t_{\underline{w}_1} + t_{\underline{w}_2}$ (*)

Also ist

$$t'_{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)} = t'_{\underline{w}_1} + t'_{\underline{w}_2}. \qquad (2a)$$

(Benutze Eindeutigkeit in UE und

$$\begin{aligned} t'_{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)} \circ \mathrm{can} &= t_{(\underline{w}_1 + \underline{w}_2)} \\ &\overset{(*)}{=} t_{\underline{w}_1} + t_{\underline{w}_2} \\ &= t'_{\underline{w}_1} \circ \mathrm{can} + t'_{\underline{w}_2} \circ \mathrm{can} \\ &= (t'_{\underline{w}_1} + t'_{\underline{w}_2}) \circ \mathrm{can}. \end{aligned}$$)

Genauso sehen wir

$$t'_{a \cdot \underline{w}} = a \cdot t'_{\underline{w}} \quad \forall a \in K \qquad (2b).$$

Aus (1), (2a) und (2b) folgt: Die Abbildung

$$\begin{aligned} (V_1 \otimes V_2) \times V_3 &\longrightarrow T \\ (\underline{v}, \underline{w}) &\longmapsto t'_{\underline{w}}(\underline{v}). \end{aligned}$$

ist bilinear. Sie induziert also eine lineare Abb.

$$t'': (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \longrightarrow T$$

mit $\underline{v} \otimes \underline{w} \longmapsto t'_{\underline{w}}(\underline{v})$,

also $(\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2) \otimes \underline{v}_3 \longmapsto t(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$.

Per Konstruktion ist $\quad t' \circ \widetilde{can} = t.$

Eindeutigkeit von t' folgt daraus, dass $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ von Vektoren der Form $(\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2) \otimes \underline{v}_3$ erzeugt wird.

- Es folgt, dass ein Isomorphismus
  $z: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \longrightarrow V_1 \otimes V \otimes V_3$ existiert
  mit $\quad z \circ \widetilde{can} = can$, also
  $$z((\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2) \otimes \underline{v}_3) = \underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2 \otimes \underline{v}_3$$

$\square$

17.13 Korollar: Ist $\mathcal{B} = (\underline{b}_i)_{i\in I}$ eine Basis von V,
$\mathcal{C} = (\underline{c}_j)_{j\in J}$ eine Basis von W,
so ist
$(\underline{b}_i \otimes \underline{c}_j)_{(i,j)\in I\times J}$ eine Basis von $V\otimes W$.

Insbesondere gilt für endlich-dim. VR V, W:
$$\dim(V\otimes W) = \dim V \cdot \dim W$$

Beweis:

$$V \cong \bigoplus_{i\in I}\langle \underline{b}_i\rangle \qquad W \cong \bigoplus_{j\in J}\langle \underline{c}_j\rangle$$

$$V\otimes W = \left(\bigoplus_i \langle \underline{b}_i\rangle\right)\otimes\left(\bigoplus_j \langle \underline{c}_j\rangle\right)$$

17.12 (D) (und (K))
$$\cong \bigoplus_i \bigoplus_j \left(\langle \underline{b}_i\rangle \otimes \langle \underline{c}_j\rangle\right)$$

17.12 (N)
$$\cong \bigoplus_i \bigoplus_j \langle \underline{b}_i \otimes \underline{c}_j\rangle$$

$\square$

Wir sehen jetzt drei Beispiele für bereits bekannte Konstruktionen, die sich als Tensorprodukt interpretieren lassen.

17.14 Beispiel:

$$K[x,y] := (K[x])[y] \cong K[x]\otimes K[y] \quad \text{als } K\text{-VR}$$
$$x^i y^j \;\longleftarrow\!\!\mapsto\; x^i \otimes y^j$$

(Polynomring in zwei Variablen)

17.15 Satz / Beispiel:

Für endlich-dimensionale K-VR V, W ist

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \cong V^* \otimes W$$

über einen Isomorphismus mit der Eigenschaft

$$(\underline{v} \mapsto \varphi(\underline{v}) \cdot \underline{w}) \leftarrow\!\shortmid \varphi \otimes \underline{w}$$

[Tatsächlich muss nur W als endlich-dim. vorausgesetzt werden.]

Beweis:

Die Abbildung
$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \xleftarrow{\ \alpha\ } V^* \times W$$
$$(\underline{v} \mapsto \varphi(\underline{v}) \cdot \underline{w}) \leftarrow\!\shortmid (\varphi, \underline{w})$$

ist wohldefiniert [...] und bilinear [...], induziert also eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \xleftarrow{\ \alpha\ } V^* \otimes W$$

mit obiger Eigenschaft. Wähle Basen

$B = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ von V und $C = (\underline{c}_1, \dots, \underline{c}_m)$ von W.

Dann hat $V^* \otimes W$ nach Satz 16.3 und Korollar 17.13 Basis $\underline{b}_1^* \otimes \underline{c}_1, \underline{b}_1^* \otimes \underline{c}_2, \dots, \dots, \underline{b}_n^* \otimes \underline{c}_m$.

Unter α wird $\underline{b}_i^* \otimes \underline{c}_j$ abgebildet auf eine lineare Abbildung $\alpha_{ij}: V \longrightarrow W$, für die gilt:

$$\alpha_{ij}(\underline{b}_k) = \underline{b}_i^*(\underline{b}_k) \cdot \underline{c}_j = \begin{cases} \underline{c}_j & \text{falls } k = i \\ \underline{0} & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist also

$$ {}_C M_B(\alpha_{ij}) = \begin{array}{cc} & \text{Spalte } i \\ & \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{Zeile } j $$

Also bilden die Abb. α_{ij} eine Basis von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Somit ist α ein Isomorphismus. $\square$

Für $V = K^n$, $W = K^m$ können wir den Isomorphismus auch explizit schreiben als:

Zeilenvektoren

Spaltenvektoren

$$\mathrm{Mat}_K(m \times n) \longleftarrow (K^n)^* \otimes K^m$$

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} \cdot (v_1, \dots, \underline{v}_n) \longleftarrow (v_1, \dots, \underline{v}_n) \otimes \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \quad\; i \\ (0 \;\; 1 \;\; 0) \end{array} = \begin{array}{c} \text{Spalte } i \\ \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Zeile } j \\ \\ \end{array} \longleftarrow \underline{e}_i^T \otimes \underline{e}_j$$

17.16 Satz/Beispiel:

Sei K ein Körper, und L ein Körper, der K als Unterkörper enthält (z.B. $\overset{K}{\mathbb{Q}} \subseteq \overset{L}{\mathbb{R}}$ oder $\overset{K}{\mathbb{R}} \subseteq \overset{L}{\mathbb{C}}$ oder $\overset{K}{\mathbb{Q}} \subseteq \overset{L}{\mathbb{C}}$).

Dann ist für jeden K-Vektorraum

$$L \otimes V \qquad (\text{genauer: } L \otimes_K V)$$

ein L-Vektorraum bezüglich der Skalarmultiplikation $\cdot$, die eindeutig dadurch festgelegt ist, dass für $\ell_1, \ell_2 \in L$ und $\underline{v} \in V$ gilt:

$$\ell_1 \cdot (\ell_2 \otimes \underline{v}) := (\ell_1 \cdot \ell_2) \otimes \underline{v}$$

Multiplikation in L

Ist V endlich-dim. als K-VR, ist ferner $L \otimes_K V$ endlich-dim. als L-VR, und

$$\dim_K V = \dim_L (L \otimes_K V)$$

Beweis:

Die Multiplikation $L \times L \to L$ ist L-bilinear, also erst recht K-bilinear. Sie induziert also eine K-lineare Abbildung

$$L \otimes_K L \xrightarrow{m'} L$$

mit $\qquad \ell_1 \otimes \ell_2 \mapsto \ell_1 \cdot \ell_2$

Wir können daher eine Skalarmultiplikation auf $L \otimes_K V$ definieren durch

$$L \times (L \otimes_K V) \xrightarrow{\text{can}} L \otimes_K (L \otimes_K V) \cong (L \otimes_K L) \otimes_K V \xrightarrow{m' \otimes \mathrm{id}} L \otimes_K V$$

mit $\quad (\ell_1, \ell_2 \otimes \underline{v}) \mapsto \ell_1 \otimes (\ell_2 \otimes \underline{v}) \mapsto (\ell_1 \otimes \ell_2) \otimes \underline{v} \quad \mapsto (\ell_1 \cdot \ell_2) \otimes \underline{v}$

(Zur Konstruktion von $m' \otimes \mathrm{id}$ siehe 17.17 unten)

Überprüfe nun L-VR-Axiome [...].

Ist $V \cong K^n = \bigoplus_{i=1}^n K$, so ist

$$L \otimes V \cong L \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^n K\right) \underset{\text{17.12 (D) (und (K))}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^n (L \otimes K) \underset{\text{17.12 (N) (und (K))}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^n L = L^n.$$

$\square$

Zum Beispiel ist also $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$. Dies ist die „richtige" Sichtweise auf den Wechsel zwischen $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-VR in den Beweisen zu Lemma 11.11 oder zum Spektralsatz 12.5.

17.17 Satz & Def.: Sind $f_i : V_i \longrightarrow W_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ K-lineare Abbildungen, so existiert genau eine K-lineare Abb. $f_1 \otimes \dots \otimes f_n : V_1 \otimes \dots \otimes V_n \longrightarrow W_1 \otimes \dots \otimes W_n$

mit $\quad \underline{v}_1 \otimes \dots \otimes \underline{v}_n \longmapsto f(\underline{v}_1) \otimes \dots \otimes f(\underline{v}_n)$

Diese Abb. ist das **Tensorprodukt** der Abb. f_i.

Beweis:

Die Abb.
$$\begin{array}{ccccc} V_1 \times \dots \times V_n & \longrightarrow & W_1 \times \dots \times W_n & \xrightarrow{\text{can}} & W_1 \otimes \dots \otimes W_n \\ (\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n) & \longmapsto & (f(\underline{v}_1), \dots, f(\underline{v}_n)) & \longmapsto & f(\underline{v}_1) \otimes \dots \otimes f(\underline{v}_n) \end{array}$$
ist multilinear. $\square$

Beispiel:

$\overline{} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ komplexe Konjugation ($\mathbb{R}$-linear)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] \arrow[r, "\overline{} \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\ \mathbb{C}[X] \arrow[r] & \mathbb{C}[X] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{cc} 1 \otimes X^i & i \otimes X^i \\ \downarrow & \downarrow \\ X^i & iX^i \end{array}$$

$$\sum a_i X^i \longmapsto \sum \overline{a_i} X^i$$

17.18 Notiz: Für K-lineare Abb. $f_i : V_i \to W_i$ und $g_i : W_i \to X_i$ ist
$$(g_1 \otimes \dots \otimes g_n) \circ (f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = (g_1 \circ f_1) \otimes \dots \otimes (g_n \circ f_n)$$

Ferner ist
$$\mathrm{id}_{V_1} \otimes \dots \otimes \mathrm{id}_{V_n} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_n}$$

17.19 Notiz: Alle Isomorphismen aus Satz 17.12 sind „natürlich" in dem Sinne, dass sie mit Tensorprodukten von Abbildungen verträglich sind.

Zum Beispiel K:

Sind $f_1 : V_1 \longrightarrow W_1$ und $f_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ gegeben, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes V_2 \arrow[r, "\cong", "K"'] \arrow[d, "f_1 \otimes f_2"'] & V_2 \otimes V_1 \arrow[d, "f_2 \otimes f_1"] \\
W_1 \otimes W_2 \arrow[r, "\cong", "K"'] & W_2 \otimes W_1
\end{tikzcd},$$

wie man leicht auf den Erzeugern $\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2$ nachrechnet.

In diesem Sinne ist auch „$f_1 \otimes f_2 = f_2 \otimes f_1$".

Zum Beispiel A:

Sind $f_i : V_i \longrightarrow W_i$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ gegeben, so kommutiert

$$\begin{tikzcd}
(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \arrow[r, "\cong", "A"'] \arrow[d, "(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3"'] & V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \arrow[d, "f_1 \otimes f_2 \otimes f_3"] \\
W_1 \otimes W_2 \arrow[r, "\cong", "A"'] & W_2 \otimes W_1
\end{tikzcd},$$

wie man leicht auf den Erzeugern $(\underline{v}_1 \otimes \underline{v}_2) \otimes \underline{v}_3$ nachrechnet.

In diesem Sinne ist „$(f_1 \otimes f_2) \otimes f_3 = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3$".

17.20 Def.: Tensorprodukt von Matrizen

$$A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}(m \times n), \quad B \in \mathrm{Mat}_K(p \times q)$$

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots\cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & \cdots\cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots\cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(m\cdot p \times n \cdot q)$$

$a_{ij} b_{kl}$

Das Tensorprodukt von Matrizen beschreibt das Tensorprodukt linearer Abbildungen:

17.21 Satz:

$f_1 : V_1 \longrightarrow W_1, \quad f_2 : V_2 \longrightarrow W_2$ linear.

Basen:

$V_1: \quad B_1 = (\underline{b}_1^{(1)}, \dots, \underline{b}_n^{(1)}) \qquad W_1: \quad C_1 = (\underline{c}_1^{(1)}, \dots, \underline{c}_m^{(1)})$

$V_2: \quad B_2 = (\underline{b}_1^{(2)}, \dots, b_q^{(2)}) \qquad W_2: \quad C_2 = (\underline{c}_1^{(2)}, \dots, \underline{c}_p^{(2)})$

$W_1 \otimes W_2: \quad$ „$C_1 \otimes C_2$"

$V_1 \otimes V_2: \quad$ „$B_1 \otimes B_2$" $:=$ „$(\underline{b}_1^{(1)} \otimes B_2, \dots, \underline{b}_n^{(1)} \otimes B_2)$"

$$:= (\underline{b}_1^{(1)} \otimes \underline{b}_1^{(2)}, \dots, \underline{b}_1^{(1)} \otimes \underline{b}_q^{(2)}, \underline{b}_2^{(1)} \otimes \underline{b}_1^{(2)}, \dots, \underline{b}_2^{(1)} \otimes \underline{b}_q^{(2)}, \dots \dots, \underline{b}_n^{(1)} \otimes \underline{b}_1^{(2)}, \dots, \underline{b}_n^{(1)} \otimes \underline{b}_q^{(2)})$$

In dieser Situation gilt:

$$\boxed{{}_{C_1 \otimes C_2}M_{B_1 \otimes B_2}(f_1 \otimes f_2) = {}_{C_1}M_{B_1}(f_1) \otimes {}_{C_2}M_{B_2}(f_2).}$$

Beweis:

Sei $A = (a_{ij}) := {}_{C_1}M_{B_1}(f_1)$, also $f_1(\underline{b}_j^{(1)}) = \sum_i a_{ij} \underline{c}_i^{(1)}$.

Sei $B = (b_{ij}) := {}_{C_2}M_{B_2}(f_2)$, also $f_2(\underline{b}_l^{(2)}) = \sum_k b_{kl} \underline{c}_k^{(2)}$

Dann ist $(f_1 \otimes f_2)(\underbrace{\underline{b}_j^{(1)} \otimes \underline{b}_l^{(2)}}_{((j-1)\cdot q + l)\text{ter Basisvektor}}) = \sum_{i,k} \underbrace{a_{ij} b_{kl}}_{\substack{\text{Eintrag von } A \otimes B \\ \text{in Zeile } (i-1)\cdot p + k \\ \text{und Spalte } (j-1)\cdot q + l}} \underbrace{\underline{c}_i^{(1)} \otimes \underline{c}_k^{(2)}}_{((i-1)\cdot p + k)\text{ter Basisvektor}}$

$\square$

17.22 Korollar: Für multiplizierbare Matrizen A_1 und A_2, und für multiplizierbare Matrizen B_1 und B_2 gilt:
$$(A_1 \otimes B_1) \cdot (A_2 \otimes B_2) = (A_1 \cdot A_2) \otimes (B_1 \cdot B_2)$$

Beweis:

Für komponierbare lineare Abbildungen f_1 und f_2,
und für komponierbare lineare Abbildungen g_1 und g_2 gilt nach Notiz 17.18: $\quad (f_1 \otimes g_1) \circ (f_2 \otimes g_2) = (f_1 \circ f_2) \otimes (g_1 \circ g_2)$.
Also folgt die Behauptung aus Satz 17.21. $\square$

17.23 Satz:

Sei $f: V \longrightarrow W$ linear, U weiterer VR. Betrachte
$$f \otimes \mathrm{id}_U : V \otimes U \longrightarrow W \otimes U.$$
Falls f ein Isomorphismus ist, ist auch $f \otimes \mathrm{id}_U$ ein Isomorphismus.
Allgemeiner gilt:
$$\underbrace{\ker(f \otimes \mathrm{id}_U)}_{V \otimes U} \underset{\hookleftarrow}{\cong} \underbrace{\ker f \otimes U}_{V \otimes U}$$
$$\underbrace{\operatorname{im}(f \otimes \mathrm{id}_U)}_{W \otimes U} \underset{\hookleftarrow}{\cong} \underbrace{\operatorname{im} f \otimes U}_{W \otimes U}$$

Beweis:

Ist f ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung f^{-1}, so ist $f \otimes \mathrm{id}$ ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $f^{-1} \otimes \mathrm{id}$ (Notiz 17.18).

Wähle für allgemeines f Komplemente V' und W', sodass gilt:
$$V = \ker f \oplus V', \quad W = \operatorname{im} f \oplus W'.$$
Dann ist die Einschränkung
$$f|_{V'} : V' \longrightarrow \operatorname{im} f$$
ein Isomorphismus.
(surjektiv: ✓
injektiv: Ist $f(\underline{v}') = \underline{0}$ für ein $\underline{v}' \in V'$, so ist $\underline{v}' \in V' \cap \ker f = \{\underline{0}\}$,
also $\underline{v}' = \underline{0}$.)

f lässt sich also schreiben als Komposition:

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[rrrr, "f"] \arrow[d, equal] & & & & W \arrow[d, equal] \\
\begin{matrix} \ker f \\ \oplus \\ V' \end{matrix} \arrow[r, two heads, "\begin{matrix} 0 \\ \oplus \\ id_{V'} \end{matrix}"] & \begin{matrix} 0 \\ \oplus \\ V' \end{matrix} \arrow[rr, "\cong"] & & \begin{matrix} \operatorname{im} f \\ \oplus \\ 0 \end{matrix} \arrow[r, hook, "\begin{matrix} id_{\operatorname{im} f} \\ \oplus \\ 0 \end{matrix}"] & \begin{matrix} \operatorname{im} f \\ \oplus \\ W' \end{matrix} \\
\begin{pmatrix} v \\ v' \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} 0 \\ v' \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix} \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
$$

(Vergleiche Isomorphiesatz 4.2.5.)

Wende hierauf $- \otimes U$ an:

$$
\begin{tikzcd}
V \otimes U \arrow[rrr, "f \otimes id"] \arrow[d, "\cong"] & & & W \otimes U \arrow[d, "\cong"] \\
\begin{matrix} \ker f \otimes U \\ \oplus \\ V' \otimes U \end{matrix} \arrow[r, two heads, "(1)"'] & \begin{matrix} 0 \\ \oplus \\ V' \otimes U \end{matrix} \arrow[r, "\cong", "(2)"'] & \begin{matrix} \operatorname{im} f \otimes U \\ \oplus \\ 0 \end{matrix} \arrow[r, hook, "(3)"'] & \begin{matrix} \operatorname{im} f \otimes U \\ \oplus \\ W' \otimes U \end{matrix}
\end{tikzcd}
$$

Mit Hilfe von 17.12 D / Notiz 17.19 sehen wir

(1) $\quad (0 \oplus id_{V'}) \otimes id_U \text{ "="} (0 \otimes id_U) \oplus (id_{V'} \otimes id_U)$

$\qquad = 0 \oplus id_{V' \otimes U}$

Genauso sehen wir:

(3) $\quad (id_{\operatorname{im} f} \oplus 0) \otimes id_U \text{ "="} id_{\operatorname{im} f \otimes U} \oplus 0$

Ferner wissen wir bereits:

(2) ist ein Isomorphismus.

Daraus folgt die Aussage $\square$